Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 7 Martie 2009

CLASA a IX-a, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Problema 1. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC se consideră punctele D şi respectiv E, astfel încât $\overline{DA} + \overline{DB} + \overline{EA} + \overline{EC} = 0$.

Fie T intersecţia dreptelor DC şi BE. Să se determine α real astfel încât

$$\overline{TB} + \overline{TC} = \alpha \overline{TA}.$$

Soluţie. Observăm că vectorii $\overline{DA} + \overline{DB}$ şi $\overline{EA} + \overline{EC}$ au, respectiv, direcţiile vectorilor necoliniari $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$, deci suma lor este 0 doar dacă amândoi sunt 0. . . . . 4 puncte

Deducem că punctele D şi E sunt mijloacele segmentelor AB şi AC, deci T este centrul de greutate al triunghiului ABC. Din relaţia

$$\overline{TA} + \overline{TB} + \overline{TC} = 0,$$

rezultă $\alpha = -1$. . . . . 3 puncte

Problema 2. Elementele mulţimii $M = \{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$ se aşează într-un tablou cu 10 linii şi 10 coloane, astfel:

1	2	$\cdots$	10
11	12	$\cdots$	20
$\vdots$			
91	92	$\cdots$	100

Să se arate că oricum am şterge 10 elemente ale tabloului, printre cele 90 de numere rămase există cel puţin 10 numere în progresie aritmetică.

Soluţie. Vom încerca să eliminăm 10 elemente astfel încât printre cele rămase să nu existe 10 în progresie aritmetică.

Observăm, mai întâi, că numerele din fiecare linie şi din fiecare coloană sunt în progresie aritmetică, deci va trebui să eliminăm câte un număr din fiecare linie şi din fiecare coloană. Implicit rezultă că oricare 2 dintre cele 10 numere eliminate trebuie să fie din linii şi coloane diferite. . . . . . 2 puncte

Apoi, dacă numărul eliminat din linia i , $1 \leq i \leq 9$, se află pe coloana k, atunci numărul eliminat din linia $i+1$ trebuie să se afle pe o coloană l, cu $l < k$, altfel, între cele 2 numere rămân în tabel neeliminate cel puţin 10 numere consecutive, care formează o progresie aritmetică. . . . . 3 puncte

Deducem că, pentru a nu rămâne în tabel 10 numere pe aceeaşi linie sau coloană sau 10 numere consecutive, trebuie să eliminăm numerele 10, 19, 28,...,91 (adică numerele de pe diagonala secundară a tabloului).

Dar atunci rămân neeliminate numerele $11, 20, 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83$ şi 92, care formează o progresie aritmetică de raţia 9. . . . . 2 puncte

Problema 3. a) Fie $a, b \geq 0$ şi $x, y > 0$. Să se arate că

$$\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} \geq \frac{(a+b)^3}{(x+y)^2}.$$

b) Fie $a, b, c \geq 0$ şi $x, y, z > 0$ astfel încât $a + b + c = x + y + z$. Să se arate că

$$\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} + \frac{c^3}{z^2} \geq a + b + c.$$

Soluţie. a) Inegalitatea este echivalentă cu

$$\left(x^2 + 2xy + y^2\right)\left(\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2}\right) \geq a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

sau

$$\frac{x^2b^3}{y^2} + 2\frac{a^3y}{x} + 2\frac{b^3x}{y} + \frac{a^3y^2}{x^2} \geq 3a^2b + 3ab^2.$$

. . . . 1 punct

Să observăm că

$$\frac{x^2b^3}{y^2} + 2\frac{a^3y}{x} = \frac{x^2b^3}{y^2} + \frac{a^3y}{x} + \frac{a^3y}{x} \geq 3\sqrt[3]{b^3a^6} = 3a^2b.$$

Analog,

$$2\frac{b^3x}{y} + \frac{a^3y^2}{x^2} \geq 3ab^2,$$

. . . . 4 puncte

şi, prin adunare, obţinem inegalitatea cerută.

Observaţii. 1) Eliminând numitorii, inegalitatea se poate scrie sub forma

$$(bx - ay)^2\left(bx^2 + 2(a+b)xy + ay^2\right) \geq 0,$$

evident adevărată.

2) Dacă $a_i \geq 0$, $x_i > 0$, pentru $i = 1, 2, \ldots, n$ iar $k \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{k+1}}{x_i^k} \geq \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^{k+1}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^{k}},$$

inegalitatea rezultând din inegalitatea lui Jensen aplicată funcţiei $f(x) = x^{k+1}$, pentru $x \in [0, +\infty)$.

b) Folosind inegalitatea precedentă, avem:

$$\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} + \frac{c^3}{z^2} \geq \frac{(a+b)^3}{(x+y)^2} + \frac{c^3}{z^2} \geq \frac{(a+b+c)^3}{(x+y+z)^2} = a + b + c.$$

....2 puncte

Problema 4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ pentru care

$$\frac{f(x+y) + f(x)}{2x + f(y)} = \frac{2y + f(x)}{f(x+y) + f(y)},$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie. Pentru $x = y$ obţinem

$$\frac{f(2x) + f(x)}{2x + f(x)} = \frac{2x + f(x)}{f(2x) + f(x)},$$

de unde

$$\frac{f(2x) + f(x)}{2x + f(x)} = 1,$$

deci $f(2x) = 2x$, adică $f(n) = n$, pentru orice n par..............3 puncte

Fie acum x şi y impare. Atunci $x + y$ este par, deci $f(x+y) = x + y$. Din ipoteză obţinem

$$(x-y)^2 + f(x)(y-x) + f(y)(x-y) = 0,$$

sau

$$(x-y)(x - y - f(x) + f(y)) = 0.$$

Deducem că $f(x) - x = f(y) - y$, pentru orice $x \neq y$, deci funcţia $f(x) - x$ e constantă.

Fie $f(x) - x = k$, deci $f(n) = n + k$, pentru n impar. .... 3 puncte

Fie acum x par şi y impar. Obţinem

$$\frac{x + y + k + x}{2x + y + k} = \frac{2y + x}{x + y + k + y + k},$$

de unde $k = 0$. Deducem că $f(n) = n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.........1 punct

Observaţie. Alternativ, se poate arăta, prin particularizări, că $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, şi apoi, inductiv, că $f(n) = n$, pentru orice n.